לוגיקה (1) תרגיל 2

1. **כתיבת היגדים בשפת תחשיב היחסים**. בתרגיל זה נגדיר שתי שפות שונות לעולם של תורת הגרפים, כלומר העולם של קבוצת נקודות (קודקודים) שכל שתים מהן מחוברות או לא מחוברות ע"י קו (צלע):

(א) $L_1 = \{G\}$. כל העצמים בעולם הם נקודות (קודקודים בגרף). G הוא סימן יחס דו מקומי. המשמעות בעולם של $G(x, y)$ היא שהקודקודים x ו-y מחוברים ע"י צלע בגרף.

(ב). $L_2 = \{V, E, G\}$, העצמים בעולם הם קודקודים וצלעות. V הוא סימן יחס חד מקומי, והמשמעות בעולם של $V(x)$ היא "x הוא קודקוד". E הוא סימן יחס חד מקומי, והמשמעות של $E(x)$ היא "x היא צלע". G הוא סימן יחס דו מקומי, והמשמעות של $G(x, y)$ היא "הקודקוד x הוא אחד הקודקודים שהצלע y מחברת" (בפרט, x הוא קודקוד ו-y היא צלע).

בכל אחת מן השפות הנ"ל כתוב פסוק בשפת תחשיב היחסים שמשמעותו:

(i) יש בגרף משולש (שלושה קודקודים שכל שניים מהם מחוברים ע"י צלע).

(ii) אין בגרף צלע מבודדת (ששני קוקקודיה אינם מחוברים לצלע אחרת).

(iii) בגרף יש בדיוק ארבעה קודקודים.

(iv) בגרף יש בדיוק שתי צלעות.

(v) יש בגרף קודקוד שמחובר ל(לפחות) שלושה קודקודים (אחרים).

2. **הוכחה באינדוקציה על יצירת פסוקים**.

נביא עתה, לצורך תירגול, **הגדרה של הקשרים הפסוקיים היסודיים השונה מזאת שהובאה בהרצאה. בתשובות לתרגילים יש להתייחס להגדרה הבאה, ולכן לא ניתן להשתמש במה שהוכח בהרצאה עבור הקשרים שהוגדרו שם.**

הקשר $\neg$ מוגדר כאן ע"י $(\boldsymbol{\neg}\ \phi) = \neg\phi$ והקשר $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ מוגדר כאן ע"י $(\phi)\,\blacksquare(\psi) = \phi\Box\psi$.

הוכח (באינדוקציה על יצירת הפסוק):

(א) כל פסוק הוא מאוזן מבחינת הסוגרים.

(ב) רישא ממש של פסוק אינה פסוק.

(ג) לפסוק ϕ נסמן ב-$m(\phi)$ את מספר ההופעות של סימן קשר השלילה ב-ϕ וב-$n(\phi)$ את מספר ההופעות של סימני הקשרים $\boldsymbol{\rightarrow}, \boldsymbol{\wedge}, \boldsymbol{\vee}$ ב-ϕ. הוכי כי מספר ההופעות של הסימן) (סוגר שמאלי) בפסוק ϕ שווה ל-$2n(\phi) + m(\phi)$.

3. **יצירת פסוקים בשפת תחשיב הפסוקים**. לכל אחת מן המחרוזות הבאות קבע אם היא פסוק בשפת תחשיב הפסוקים (עם פסוקים יסודיים P, Q, R). אם התשובה היא חיובית רשום סדרת (או עץ) יצירה שלה. אם התשובה שלילית הוכח אותה. רמז: כדאי להעזר בתכונות הפסוקים שהוכחו בשאלה 2.

(א) $(P) \boldsymbol{\rightarrow} (((Q) \boldsymbol{\wedge} (P)) \boldsymbol{\rightarrow} (R))$.

(ב) $(P) \boldsymbol{\rightarrow} (R) \boldsymbol{\rightarrow} (Q)$.

(ג) (Q).

(ד) $(P) \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} (Q)$.

(ה) $((P) \boldsymbol{\rightarrow} (\boldsymbol{\neg} (R)) \boldsymbol{\vee} (Q)) \boldsymbol{\rightarrow} (P)$.

(ו) $(P) \boldsymbol{\vee} (\boldsymbol{\neg} (Q)$.

(ז) $(P) \boldsymbol{\rightarrow} (\boldsymbol{\neg}\ Q)$.